

# CINEMÁTICA LINEAL Y ROTATORIA

Biomecánica Deportiva

Apuntes de Clase

$$\begin{aligned}N_1 &= (\theta_1 - \theta_0) / \Delta t = 5^\circ - 0^\circ / 0.02 = 250^\circ/s = 2.01 \text{ r/s} \\N_2 &= (\theta_2 - \theta_1) / \Delta t = 10^\circ - 5^\circ / 0.02 = 250^\circ/s = 2.01 \text{ r/s} \\N_3 &= (\theta_3 - \theta_2) / \Delta t = 22^\circ - 10^\circ / 0.02 = 600^\circ/s = 10.47 \text{ r/s} \\N_4 &= (\theta_4 - \theta_3) / \Delta t = 35^\circ - 22^\circ / 0.02 = 650^\circ/s = 11.34 \text{ r/s} \\N_5 &= (\theta_5 - \theta_4) / \Delta t = 58^\circ - 35^\circ / 0.02 = 900^\circ/s = 15.71 \text{ r/s} \\N_6 &= (\theta_6 - \theta_5) / \Delta t = 65^\circ - 58^\circ / 0.02 = 350^\circ/s = 6.10 \text{ r/s} \\N_7 &= (\theta_7 - \theta_6) / \Delta t = 90^\circ - 65^\circ / 0.02 = 750^\circ/s = 13.09 \text{ r/s}\end{aligned}$$

Por:

Gustavo Ramón S.\*

\* Doctor en *Nuevas Perspectivas en la Investigación en Ciencias de la Actividad Física y el Deporte* (Universidad de Granada).

Docente - Investigador del Instituto Universitario de Educación Física, Universidad de Antioquia (Colombia).

Correo: gusramon2000@yahoo.es



## CINEMÁTICA LINEAL

La cinemática es la rama de la biomecánica que describe los movimientos sin tener en cuenta su causa. La cinemática lineal está relacionada con los movimientos de tipo lineal o curvilíneo.

**El movimiento se define como:**

*la variación de posición que experimenta un cuerpo en el transcurso del tiempo con respecto a un marco de referencia considerado como fijo.*

Para el estudio de la cinemática se estudiarán las siguientes variables :

- Temporales : tiempo, frecuencia y período.
- Espaciales : distancia y desplazamiento
- Espacio-temporales : velocidad, rapidez y aceleración

### Variables Temporales :

La unidad internacional de medida del tiempo o básica es el segundo. Otras medidas mayores son el minuto, la hora, el día, la semana, el mes o el año. Medidas menores son las décimas de segundo, las centésimas o las milésimas de segundo.

La *frecuencia* es el número de movimientos que se realizan en la unidad de tiempo, por ejemplo, el número de pasos por segundo, el número de brazadas por segundo en natación.

$$f = \# \text{movimientos} / \text{intervalo de tiempo}$$

El período es el inverso de la frecuencia, es decir el tiempo para un movimiento.

$$p = 1 / f$$

### Variables Espaciales :

Cuando un cuerpo experimenta un variación de posición en el espacio durante un determinado tiempo y con respecto a un punto de referencia considerado como fijo, se habla de que el cuerpo recorrió una distancia o que realizó un desplazamiento.

La *Posición* de un objeto se refiere a su localización en el espacio relativa a un punto considerado como fijo, que puede ser un eje de coordenadas X o Y. Así por ejemplo, cuando decimos que el aro de baloncesto está a 3.05 m , lo está con respecto al piso, considerado como el punto 0. La línea de lanzamiento para un tiro libre está a 4.8 m (aproximadamente) del aro, tomado el aro como el punto 0.

El término **distancia** hace referencia a la sumatoria de los cambios de posición de un objeto en el espacio, recorrido que se hace sin tener en cuenta su dirección. En este sentido, la distancia es una cantidad escalar. Así por ejemplo, un nadador que recorre dos piscinas de 50 metros, nada una distancia de 100 metros, no importando que en la segunda piscina se devuelve.

El término **desplazamiento** es la diferencia de posición inicial comparada con la posición final ( $d = p_f - p_i$ ;  $p_f$  = posición final,  $p_i$  = posición inicial). Es de carácter vectorial, por lo que se tiene en cuenta su dirección. Para el ejemplo anterior del nadador, el desplazamiento es de cero, pues el punto de inicio y el punto final fueron los mismos. Por lo tanto, la distancia neta o resultante es de cero.

No en todos los casos de movimiento de un cuerpo la distancia y el desplazamiento son diferentes. En el caso de un corredor de 100 metros llanos, la distancia y el desplazamiento son iguales.

La unidad internacional de medida es el metro. Esta unidad de medida tiene a su vez derivadas mayores como son el Decámetro ( $Dm = 10\text{ m}$ ), Hectómetro ( $Hm = 100\text{ m}$ ) y el Kilómetro ( $Km = 1000\text{ m}$ ). Las menores son del decímetro ( $dm = 0.10\text{ m}$ ), el centímetro ( $cm = 0.01\text{ m}$ ) y el milímetro ( $mm = 0.001\text{ m}$ ).

### Variables espacio-temporales :

Las variables espacio-temporales son las variables que no sólo tienen en cuenta la variación espacial que sufre un cuerpo con respecto al marco de referencia fijo, sino que además la relacionan con el tiempo empleado para dicho movimiento.

Las variables espacio-temporales son por tanto la **rapidez y la velocidad**. Del mismo modo que se diferenciaron entre distancia y desplazamiento (porque son cantidades de diferente tipo: escalar la primera y vectorial la segunda), de la misma manera la rapidez es una cantidad escalar y la velocidad es una cantidad vectorial.

Para el ejemplo del nadador que recorre 100 metros nadando, si asumimos que en el trayecto empleó 50 segundos, entonces su rapidez será igual a :

$$\begin{aligned} r &= \text{distancia} / \text{intervalo del tiempo} \\ r &= \text{distancia} / \Delta \text{ tiempo} \\ r &= 100\text{ m} / 50\text{ s} = 2\text{ m/s} \end{aligned}$$

Para el mismo ejemplo, la velocidad resultante será de :

$$\begin{aligned} v &= \text{desplazamiento} / \text{tiempo} \\ v &= \text{posición final} - \text{posición inicial} / \text{tiempo final} - \text{tiempo inicial} \\ v &= (P_f - P_i) / (t_f - t_i) \\ \mathbf{v} &= \Delta \mathbf{P} / \Delta t \\ v &= 0\text{ m} / 50\text{ s} = 0 \end{aligned}$$

Como se puede apreciar, las unidades de la velocidad son básicamente los metros sobre segundo, pero pueden aparecer otras unidades como los kilómetros por hora, los metros por segundo, etc.

Cuando se toma en consideración un intervalo de tiempo prolongado, la velocidad resultante que se calcula se denomina *velocidad promedio* ( $V = \text{Velocidad final} + \text{Velocidad inicial} / 2$ ) Cuando el intervalo de tiempo es muy corto o tendiendo a cero, se considera como la *velocidad instantánea*.

Cuando un movimiento se realiza con velocidad constante, el movimiento recibe el nombre de movimiento uniforme. Los cálculos en este tipo de movimientos son sencillos sobre todo cuando las cantidades que se manejan son escalares. Cuando se trabaja con

magnitudes vectoriales, los cálculos son un tanto mas complejos por el tratamiento matemático, en especial el de trigonometría.

Cuando el movimiento no es uniforme, aparece una variable derivada de la velocidad que es la **aceleración**. Cuando un cuerpo cambia su velocidad en el transcurso del tiempo, se dice que el cuerpo experimenta una aceleración. De esta manera, la aceleración es igual :

$a = \text{velocidad final} - \text{velocidad inicial} / \text{tiempo final} - \text{tiempo inicial}$

$$a = (V_f - V_i) / t_f - t_i$$

$$a = \Delta V / \Delta t$$

donde  $V_f$  = velocidad final

$V_i$  = velocidad inicial

Las unidades de la aceleración son metros por segundo cada segundo ( $m / s^2$ ).

A este tipo de movimiento se puede llamar movimiento uniformemente acelerado. Para el cálculo de distancias velocidades en este tipo de movimiento aparecen algunas fórmulas derivadas de las anteriores :

$$a = (V_f - V_i) / t$$

$$V_f = V_i + at \quad (1)$$

La velocidad promedio es igual al cambio de posición sobre el tiempo:

$$V_f + V_i / 2 = (P_f - P_i) / t \quad (2)$$

reemplazando  $V_f$  y despejando  $P_f - P_i$  , obtenemos :

$$P_f - P_i = (V_f + V_i) * t / 2$$

$$P_f - P_i = (V_i + at + V_i) * t / 2$$

$$P_f - P_i = (2V_i + at) * t / 2$$

$$P_f - P_i = 2V_i t / 2 + at^2 / 2$$

pero  $P_f - P_i = d$ , entonces

$$d = V_i t + \frac{1}{2} at^2$$

De la ecuación (1) se puede despejar el tiempo, obteniéndose :

$$t = (V_f - V_i) / a$$

la cual se puede reemplazar en la ecuación (2):

$$V_f + V_i / 2 = P_f - P_i / ((V_f - V_i) / a)$$

$$V_f + V_i / 2 = (P_f - P_i) * a / (V_f - V_i)$$

$$2 (P_f - P_i) a = (V_f + V_i) (V_f - V_i)$$

$$2 (P_f - P_i) a = (V_f^2 - V_i^2)$$

$$V_f^2 = V_i^2 + 2a(P_f - P_i)$$

$$V_f^2 = V_i^2 + 2ad$$

Movimiento parabólico :

Un caso especial de movimiento tanto en la física clásica como en la biomecánica deportiva es el movimiento parabólico. Este tipo de movimiento se produce cuando un cuerpo es lanzado al aire, de manera que sobre él *sólo influyen dos factores para modificar su trayectoria : la fuerza de la gravedad y la resistencia del viento*. La fuerza de la gravedad es un vector perpendicular a la superficie terrestre y en sentido hacia el centro de la misma. La magnitud de la aceleración de esta fuerza es de  $9.8 \text{ m/s}^2$ .

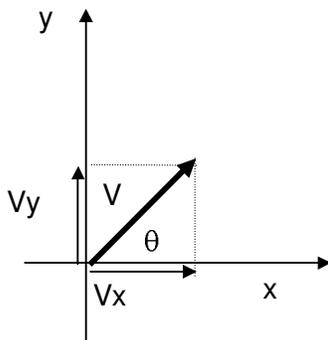
En el movimiento parabólico se produce una combinación de movimiento uniforme y de movimiento uniformemente acelerado o retardado. Así, en el plano horizontal, el movimiento es uniforme, aplicándose para ello las fórmulas pertinentes, anteriormente anotadas. En el plano vertical, el movimiento es uniformemente variado. Hacia arriba es un movimiento uniformemente retardado y hacia abajo, uniformemente acelerado. Para los cálculos en este plano se usan las fórmulas pertinentes anteriormente anotadas.

A causa de la fuerza de la gravedad, el movimiento de un cuerpo que es lanzado al aire, sigue una trayectoria parabólica, pues la atracción de la gravedad implica una variable exponencial, que produce trayectorias parabólicas. Si la atracción de la tierra no existiera, al lanzar un cuerpo al espacio, este seguiría una trayectoria rectilínea.

En el estudio de los movimientos parabólicos existen tres casos :

1. Cuando el punto de partida está al mismo nivel horizontal de aterrizaje.
2. Cuando el punto de partida está mas alto que el nivel horizontal de aterrizaje.
3. Cuando el punto de partida está mas bajo que nivel horizontal de aterrizaje.

**Ecuaciones para cuando el punto de aterrizaje está al mismo nivel horizontal de lanzamiento:**



- En el plano horizontal (movimiento uniforme)
  - $V_x = \text{Velocidad horizontal}$
  - $V_x = V \cdot \cos \theta$
  - $X = V_x \cdot t$
  - $X = V \cdot \cos \theta \cdot t$

En este plano, la velocidad horizontal es máxima cuando el  $\cos \theta$  sea máximo, es decir, cuando el ángulo es de  $0^\circ$ .

- En el plano vertical (movimiento uniformemente variado)

- Hacia arriba :

$$V_y = V \cdot \text{sen } \theta$$

$$V_f y = V_i y - gt$$

donde  $V_f y$  es la velocidad final en Y;  $V_i y$  es la velocidad inicial en Y;  $g$  es la gravedad con valor negativo porque el movimiento es hacia arriba y la aceleración es siempre hacia abajo.

Pero como  $V_f y$  es igual a 0 al llegar al punto mas alto de la parábola, entonces:

$$0 = V_i y - gt$$

$$V_i y = gt$$

pero como  $V_i y = V \cdot \text{seno } \theta$  , entonces

$$V \cdot \text{sen } \theta = gt \text{ de donde,}$$

$$\mathbf{t = V \cdot \text{sen } \theta / g}$$

El espacio que recorre el móvil en el eje vertical será igual a:

$$y = V_i y \cdot t - \frac{1}{2} gt^2$$

$$\mathbf{y = (V \cdot \text{sen } \theta) \cdot t - \frac{1}{2} gt^2}$$

- Hacia abajo :

$V_f y =$  Velocidad final hacia abajo

$V_i y =$  velocidad inicial hacia abajo

$$V_f y = V_i y + gt ,$$

pero como  $V_i y$  es igual a 0 al iniciar en lo mas alto de la parábola, entonces,

$$V_f y = gt$$

El espacio que recorre el móvil hacia abajo (Y) será igual a

$$Y = V_i y \cdot t + \frac{1}{2} gt^2 ,$$

pero como  $V_i y$  es igual a cero, entonces

$$\mathbf{Y = \frac{1}{2} gt^2}$$

De la anterior ecuación se puede despejar el tiempo t :

$$\mathbf{t = \sqrt{(2Y / g)},}$$

pero como

$$V_f y^2 = V_i y^2 + 2ay$$

$$V_i y^2 = 0$$

$a = g$  , entonces

$$Y = V_f y^2 / 2g ,$$

pero  $V_y = V \cdot \text{sen } \theta$  , entonces

$$Y = (V \cdot \text{sen } \theta)^2 / 2g$$

reemplazando Y , tenemos

$$t = \sqrt{2((V \cdot \text{sen } \theta)^2 / 2g) / g}$$

$$t = V \cdot \text{sen } \theta / g$$

- \* Si comparamos las fórmulas para el cálculo del tiempo tanto en el movimiento hacia abajo como hacia arriba, vemos que son iguales a  $V \cdot \text{sen } \theta / g$  , de manera que el tiempo total (tiempo subiendo mas tiempo bajando), será igual a

$$T = V \cdot \text{sen } \theta / g + V \cdot \text{sen } \theta / g$$

$$T = 2V \cdot \text{sen } \theta / g$$

de donde se desprende que el tiempo que el objeto permanezca en al aire es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad y del máximo valor del seno  $\theta$  , el cual es de 1 cuando el ángulo es de  $90^\circ$ , pero cuando el ángulo es  $0^\circ$ , el seno  $\theta$  es 0, es decir, el objeto no se eleva. Por otra parte, el tiempo es inversamente proporcional a la gravedad. Cuando se realizan actividades que están de determinada altura sobre el nivel del mar, el valor de la gravedad disminuye, por lo que un objeto lanzado al aire, demora mas. Estos factores son determinantes en la práctica de los deportes de competencia, en especial en los juegos olímpicos pues este hecho afecta los resultados de las competencias.

El desplazamiento total en el eje X, llamado Rango (R), será igual

$$R = V_x \cdot T$$

$$= V \cdot \cos \theta \cdot 2V \cdot \text{sen } \theta / g$$

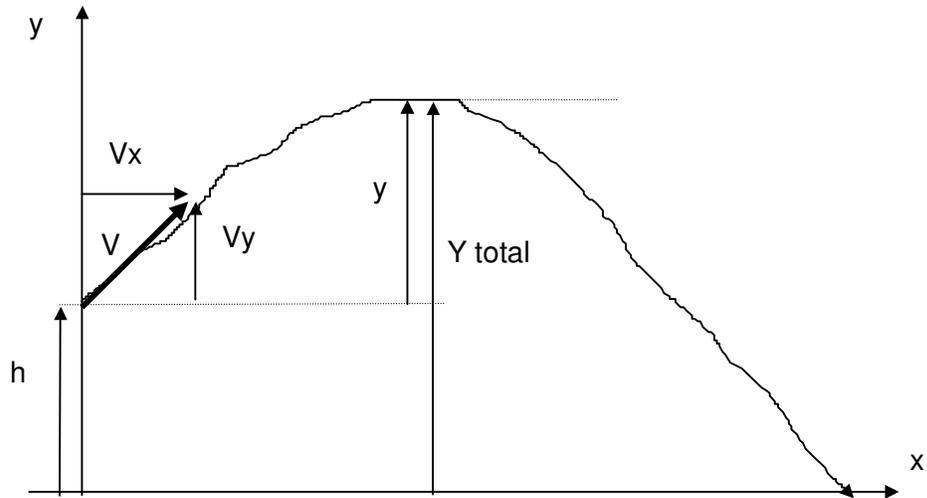
$$= V^2 \cdot 2 \cos \theta \text{ sen } \theta / g$$

$$R = V^2 \cdot \text{sen } 2\theta / g$$

De esta fórmula se desprende que :

- \* el rango depende de la magnitud de la velocidad al cuadrado
- \* el ángulo óptimo está condicionado por el máximo valor de seno  $2\theta$  , el cual es igual a 1 (que es el valor de un ángulo de  $90^\circ$ ), de donde  $\text{seno } 2\theta = 1 = 90^\circ$  ,  $\theta = 90^\circ / 2 = 45^\circ$
- \* el rango es inversamente proporcional a la gravedad.

**Ecuaciones cuando el plano del lanzamiento no es igual al del aterrizaje.**



- Hacia abajo  
 $Y$  = espacio recorrido en el eje  $Y$   
 $h$  = altura desde donde es liberado el cuerpo

$$Y_{\text{total}} = Y + h$$

$$Y_{\text{total}} = (V \cdot \text{sen } \theta)^2 / 2g + h$$

Pero como el tiempo en el eje vertical es igual a

$$t = \sqrt{2Y / g},$$

reemplazando en esta ecuación el valor de  $Y$ , entonces se obtiene que

$$t = \sqrt{(2(V \cdot \text{sen } \theta)^2 / 2g + h) / g},$$

$$t = \sqrt{(V \cdot \text{sen } \theta)^2 + 2g h} / g$$

- Tiempo total :

$T$  = tiempo subiendo + tiempo bajando

$$t \text{ subiendo} = V \cdot \text{sen } \theta / g$$

$$t \text{ bajando} = \sqrt{(V \cdot \text{sen } \theta)^2 + 2g h} / g$$

$$T = V \cdot \text{sen } \theta / g + \sqrt{(V \cdot \text{sen } \theta)^2 + 2g h} / g$$

$$T = (V \cdot \text{sen } \theta + \sqrt{(V \cdot \text{sen } \theta)^2 + 2g h}) / g$$

EJERCICIOS PRÁCTICOS :

Para 1988, las siguientes eran las marcas en tiempo de las pruebas de pista en atletismo, tanto en hombres como en mujeres. Para cada uno de ellas, calcular la rapidez promedio.

	Distancia	Mujeres	Hombres
1	100 m	10.76 s	9.83 s
2	200 m	21.76 s	19.72 s
3	400 m	47.60 s	43.86 s
4	800 m	1min 53.28 s	1 min 41.73 s
5	1500 m	3 min 52.47 s	3 min 26.46 s
6	1 milla	4 min 16.71 s	3 min 46.32 s
7	3000 m	8 min 22.62 s	7 min 32.10 s
8	5000 m	14 min 37.33 s	12 min 58.32 s
9	10.000 m	30 min 13.74 s	27 min 13.81 s
10	42 Km	2 hr 25 min 17 s	2 hr 07 min 12 s

1. Prueba de 100 m

Mujeres :

$$r = \text{distancia} / \text{tiempo}$$

$$r = 100 \text{ m} / 10.76 \text{ s}$$

$$r = 9.29 \text{ m/s}$$

Hombres

$$r = \text{distancia} / \text{tiempo}$$

$$r = 100 \text{ m} / 9.83 \text{ s}$$

$$r = 10.17 \text{ m/s}$$

2. 200 m

Mujeres :

$$r = \text{distancia} / \text{tiempo}$$

$$r = 200 \text{ m} / 21.76 \text{ s}$$

$$r = 9.19 \text{ m/s}$$

Hombres :

$$r = \text{distancia} / \text{tiempo}$$

$$r = 200 \text{ m} / 19.72 \text{ s}$$

$$r = 10.14 \text{ m/s}$$

3. 400 m

Mujeres :

$$r = \text{distancia} / \text{tiempo}$$

$$r = 400 \text{ m} / 47.60 \text{ s}$$

$$r = 8.40 \text{ m/s}$$

Hombres:

$$r = \text{distancia} / \text{tiempo}$$

$$r = 400 \text{ m} / 43.86 \text{ s}$$

$$r = 9.11 \text{ m/s}$$

4. 800 m

Mujeres :

$$r = \text{distancia} / \text{tiempo}$$

$$r = 800 \text{ m} / (1 \text{ min} * 60 \text{ seg/min} + 53.28 \text{ s})$$

$$r = 800 \text{ m} / 113.28 \text{ s}$$

$$r = 7.06 \text{ m/s}$$

Hombres:

$$r = \text{distancia} / \text{tiempo}$$

$$r = 800 \text{ m} / (1 \text{ min} * 60 \text{ s/min} + 41.73 \text{ s})$$

$$r = 800 \text{ m} / 101.73 \text{ s}$$

$$r = 7.86 \text{ m/s}$$

5. 1.500 m

Mujeres :

$$r = \text{distancia} / \text{tiempo}$$

$$r = 1500 \text{ m} / (3 \text{ min} * 60 \text{ seg/min} + 52.47 \text{ s})$$

$$r = 1500 \text{ m} / 232.47 \text{ s}$$

Hombres:

$$r = \text{distancia} / \text{tiempo}$$

$$r = 1500 \text{ m} / (3 \text{ min} * 60 \text{ seg/min} + 26.46 \text{ s})$$

$$r = 1500 \text{ m} / 206.46 \text{ s}$$

$$r = 6.45 \text{ m/s}$$

$$r = 7.26 \text{ m/s}$$

6. 1 milla

Mujeres :

$$r = \text{distancia} / \text{tiempo}$$

$$r = 1609 \text{ m} / (4 \text{ min} * 60 \text{ seg/min} + 16.71 \text{ s})$$

$$r = 1609 \text{ m} / 256.71 \text{ s}$$

$$r = 6.27 \text{ m/s}$$

Hombres :

$$r = \text{distancia} / \text{tiempo}$$

$$r = 1609 \text{ m} / (3 \text{ min} * 60 \text{ seg/min} + 46.32 \text{ s})$$

$$r = 1609 \text{ m} / 226.32 \text{ s}$$

$$r = 7.10 \text{ m/s}$$

7. 3.000 m

Mujeres :

$$r = \text{distancia} / \text{tiempo}$$

$$r = 3000 \text{ m} / (8 \text{ min} * 60 \text{ seg/min} + 22.62 \text{ s})$$

$$r = 3000 \text{ m} / 508.62 \text{ s}$$

$$r = 5.97 \text{ m/s}$$

Mujeres :

$$r = \text{distancia} / \text{tiempo}$$

$$r = 3000 \text{ m} / (7 \text{ min} * 60 \text{ seg/min} + 32.10 \text{ s})$$

$$r = 3000 \text{ m} / 472.1 \text{ s}$$

$$r = 6.64 \text{ m/s}$$

8. 5000 m

Mujeres :

$$r = \text{distancia} / \text{tiempo}$$

$$r = 5000 \text{ m} / (14 \text{ min} * 60 \text{ seg/min} + 37.33 \text{ s})$$

$$r = 5000 \text{ m} / 508.62 \text{ s}$$

$$r = 5.70 \text{ m/s}$$

Mujeres :

$$r = \text{distancia} / \text{tiempo}$$

$$r = 5000 \text{ m} / (12 \text{ min} * 60 \text{ seg/min} + 58.32 \text{ s})$$

$$r = 5000 \text{ m} / 508.62 \text{ s}$$

$$r = 6.42 \text{ m/s}$$

9. 10.000 m

Mujeres

$$r = \text{distancia} / \text{tiempo}$$

$$r = 10.000 \text{ m} / (30 \text{ min} * 60 \text{ seg/min} + 13.74 \text{ s})$$

$$r = 10000 \text{ m} / 1813.74 \text{ s}$$

$$r = 5.51 \text{ m/s}$$

Mujeres :

$$r = \text{distancia} / \text{tiempo}$$

$$r = 10.000 \text{ m} / (27 \text{ min} * 60 \text{ seg/min} + 13.81 \text{ s})$$

$$r = 10000 \text{ m} / 1633.81 \text{ s}$$

$$r = 6.12 \text{ m/s}$$

10. 42 Km

Mujeres

$$r = \text{distancia} / \text{tiempo}$$

$$r = 42.000 \text{ m} / (2 \text{ h} * 60 \text{ min/h} * 60 \text{ seg/min} + 25 \text{ min} * 60 \text{ seg/min} + 17 \text{ s})$$

$$r = 42000 \text{ m} / 8717 \text{ s}$$

$$r = 4.81 \text{ m/s}$$

Hombres

$$r = \text{distancia} / \text{tiempo}$$

$$r = 42.000 \text{ m} / (2 \text{ h} * 60 \text{ min/h} * 60 \text{ seg/min} + 7 \text{ min} * 60 \text{ seg/min} + 12 \text{ s})$$

$$r = 42000 \text{ m} / 7632 \text{ s}$$

$$r = 5.50 \text{ m/s}$$

2. Los siguientes son los datos de posición-tiempo de un corredor en 50 m.

Distancia (m)	0	10	21	29	40
Tiempo (s)	0	3.1	4.3	5.5	6.6

Calcular :

- la velocidad en cada uno de los tramos
- la velocidad promedio
- la aceleración en cada uno de los tramos

d) Analizar el tipo de movimiento que realizó el atleta.

a) Velocidad en cada uno de los tramos :

$$V_1 = V_{0-10 \text{ m}} = P_f - P_i / t_f - t_i = 10 \text{ m} - 0 \text{ m} / 3.1 \text{ s} - 0 \text{ s} = 3.22 \text{ m/s}$$

$$V_2 = V_{10-21 \text{ m}} = P_f - P_i / t_f - t_i = 21 \text{ m} - 10 \text{ m} / 4.3 \text{ s} - 3.1 \text{ s} = 9.16 \text{ m/s}$$

$$V_3 = V_{21-29 \text{ m}} = P_f - P_i / t_f - t_i = 29 \text{ m} - 21 \text{ m} / 5.5 \text{ s} - 4.3 \text{ s} = 6.66 \text{ m/s}$$

$$V_4 = V_{29-40 \text{ m}} = P_f - P_i / t_f - t_i = 40 \text{ m} - 29 \text{ m} / 6.6 \text{ s} - 5.5 \text{ s} = 10 \text{ m/s}$$

b) La velocidad promedio:

$$V = (V_i + V_f) / 2 = (3.22 \text{ m/s} + 10 \text{ m/s}) / 2 = 6.61 \text{ m/s}$$

c) Aceleración en cada uno de los tramos :

$$a_1 = V_2 - V_1 / t_2 - t_1 = 9.16 \text{ m/s} - 3.22 \text{ m/s} / 4.3 \text{ s} - 3.1 \text{ s} = 4.95 \text{ m/s}^2$$

$$a_2 = V_3 - V_2 / t_3 - t_2 = 6.66 \text{ m/s} - 9.16 \text{ m/s} / 5.5 \text{ s} - 4.3 \text{ s} = -2.08 \text{ m/s}^2$$

$$a_3 = V_4 - V_3 / t_4 - t_3 = 10 \text{ m/s} - 6.66 \text{ m/s} / 6.6 \text{ s} - 5.5 \text{ s} = 3.03 \text{ m/s}^2$$

El atleta realizó un movimiento caótico. La máxima velocidad la alcanzó en el último tramo; la máxima aceleración la realizó en el tramo de 10 a 21 m; en el siguiente tramo disminuyó su velocidad y al final volvió a incrementarla pero no tanto como al inicio.

3. Un arquero en un saque de meta hace que el balón salga en un ángulo de  $30^\circ$  con relación a la horizontal y cae a 60 m ¿ A qué velocidad salió el balón ? ¿Cuánto tiempo demora en el aire?, ¿Cuál es la máxima altura que alcanza?, ¿Qué distancia alcanzaría si sacara con un ángulo de  $45^\circ$  ?

a) Velocidad con que sale el balón :

$$R = V^2 * \text{sen } 2\theta / g$$

$$60 \text{ m} = V^2 * \text{sen } 2(30^\circ) / 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$V^2 = 60 \text{ m} * 9.81 \text{ m/s}^2 / \text{sen } (60^\circ)$$

$$V^2 = 588.6 \text{ m}^2/\text{s}^2 / 0.866$$

$$V = (679.65 \text{ m}^2/\text{s}^2)^{1/2}$$

$$V = 26.07 \text{ m/s}$$

b) Tiempo que demora en el aire:

$$T = 2V * \text{sen } \theta / g$$

$$T = 2V * \text{sen } (30^\circ) / 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$T = 2 * 26.07 \text{ m/s} * 0.5 / 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$T = 2.69 \text{ s}$$

c) Máxima altura que alcanza :

$$Y = (V * \text{sen } \theta)^2 / 2g$$

$$Y = (26.07 \text{ m/s} * \text{sen } 30^\circ)^2 / 2 * 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$Y = (26.07 * 0.5)^2 / 19.62 \text{ m/s}^2$$

$$Y = (13.035 \text{ m/s})^2 / 19.62 \text{ m/s}^2$$

$$Y = 169.91 \text{ m}^2/\text{s}^2 / 19.62 \text{ m/s}^2$$

$$Y = 8.66 \text{ m}$$

d) Distancia con un ángulo de  $45^\circ$  :

$$R = V^2 * \text{sen } 2\theta / g$$

$$R = (26.07 \text{ m/s})^2 * \text{sen } (2 * 45^\circ) / 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$R = 679.64 \text{ m}^2/\text{s}^2 * 1 / 9.81 \text{ m/s}^2$$
$$R = 69.28 \text{ m}$$

EJERCICIOS PARA REALIZAR .

1. Un arquero de fútbol posee una velocidad de desplazamiento lateral de 4 m/s . A qué velocidad debe patear el balón un delantero para convertir un penalty, si el desea introducir el balón a una distancia de 0.25 cm del poste lateral ?
2. Un jugador de voleibol realiza un saque de tenis a una distancia de 2m de la línea final, con una velocidad de 5m/s , en un ángulo de 30° y desde una altura de 2 m. ¿ el balón pasa la red ?
3. Un corredor de maratón posee un velocidad promedio de carrera de 5 m/s , ¿en cuanto tiempo recorre el maratón ?
4. Un nadador de pecho realiza una carrera de 200 m en un tiempo de 3 min 20 seg. Cual fue su velocidad en Km/h?
5. La posta de 4x400 mt realizó los siguientes promedios de rapidez : el primero, 28.8 Km/h; el segundo, 27 km/h; el tercero, 510 m/min y el último, 9 m/s . Cual fue el tiempo que realizaron para la prueba ?
6. A qué velocidad debe lanzar la jabalina un lanzador para que esta llegue a 90 m, si la lanza en un ángulo de 35° ?

## CINEMÁTICA ROTATORIA

La cinemática es la rama de la biomecánica que describe los movimientos sin tener en cuenta su causa. La cinemática rotatoria está relacionada con los movimientos de tipo angular. En esta sentido, cinemática rotatoria describe los movimientos angulares sin tener en cuenta su causa. Para este apartado, se desarrollarán las siguientes variables :

- Temporales : tiempo, frecuencia y período.
- Espaciales : distancia angular y desplazamiento angular
- Espacio temporales : velocidad angular, rapidez angular y aceleración angular.

### Variables Temporales :

La unidad internacional básica de medida del tiempo es el segundo. Otras medidas mayores son el minuto, la hora, el día, la semana, el mes o el año. Medidas menores son las décimas de segundo, las centésimas o las milésimas de segundo.

La *frecuencia* es el número de rotaciones o giros que se realizan en la unidad de tiempo, por ejemplo, el número girasoles que hace un gimnasta en la barra.

El período es el inverso de la frecuencia, es decir el tiempo para una rotación.

### Variables Espaciales :

Cuando un cuerpo experimenta una rotación en el espacio durante un determinado tiempo y con respecto a un marco de referencia considerado como fijo, se habla de que el cuerpo recorrió un ángulo o que realizó un desplazamiento angular.

El término ***distancia angular*** hace referencia a la sumatoria de ángulos recorridos sin tener en cuenta su dirección. En este sentido, la distancia angular es una cantidad escalar. Así por ejemplo, un gimnasta que realiza tres girasoles , recorre una distancia angular de  $1080^\circ$  ( $360^\circ * 3$  )

El término ***desplazamiento*** es de carácter vectorial, por lo que se tiene en cuenta su dirección. Para el ejemplo anterior del gimnasta, el desplazamiento angular es de cero, pues el punto de inicio y el punto final fueron los mismos. Por lo tanto, la distancia neta o resultante es de cero.

La unidad internacional de medida angular es el grado. Una revolución o giro completo tiene  $360^\circ$  . Existe también el radian. **El radian ( r ) equivale a  $57.3^\circ$  o 0.16 revoluciones.**

### Variables espacio-temporales :

Las variables espacio-temporales son las variables que no sólo tienen en cuenta la variación espacial que sufre un cuerpo con respecto al marco de referencia fijo, sino que además la relacionan con el tiempo empleado para dicho movimiento.

Las variables espacio-temporales son por tanto la **rapidez angular (  $\sigma$  )** y la **velocidad angular (  $w$  )**. Del mismo modo que se diferenció entre distancia angular y desplazamiento angular (porque son cantidades de diferente tipo: escalar la primera y vectorial la segunda), de la misma manera la rapidez es una cantidad escalar y la velocidad es una cantidad vectorial.

Para el ejemplo del gimnasta que realiza tres girasoles en 1.2 s, entonces su rapidez será igual a :

$$\begin{aligned}\sigma &= \text{distancia angular} / \text{tiempo} \\ \sigma &= 1080^\circ / 1.2\text{s} = 900^\circ / \text{s}\end{aligned}$$

Para el mismo ejemplo, la velocidad resultante será de :

$$w = \text{desplazamiento angular} / \text{tiempo}$$

$$W = \text{ángulo final} - \text{ángulo inicial} / \text{tiempo final} - \text{tiempo inicial}$$

$$W = (\phi_f - \phi_i) / t_f - t_i$$

$$W = \Delta\phi / \Delta t$$

$$W = 0^\circ / 1.2\text{s} = 0^\circ/\text{s}$$

Como se puede apreciar, las unidades de la velocidad son básicamente los grados, pero pueden aparecer otras unidades como radianes o revoluciones sobre segundo.

Cuando se toma en consideración un intervalo de tiempo prolongado, la velocidad resultante que se calcula se denomina *velocidad promedio*. Cuando el intervalo de tiempo es muy corto o tendiendo a cero, se considera como la *velocidad instantánea*.

Cuando un movimiento se realiza con velocidad constante, el movimiento recibe el nombre de movimiento uniforme. Los cálculos en este tipo de movimientos son sencillos sobre todo cuando las cantidades que se manejan son escalares. Cuando se trabaja con magnitudes vectoriales, los cálculos son un tanto más complejos por el tratamiento matemático, en especial el de trigonometría.

Cuando el movimiento no es uniforme, aparece una variable derivada de la velocidad : la **aceleración**. Cuando un cuerpo cambia su velocidad en el transcurso del tiempo, se dice que el cuerpo experimenta una aceleración. De esta manera, la aceleración es igual :

$$\alpha = \text{velocidad final} - \text{velocidad inicial} / \text{tiempo final} - \text{tiempo inicial}$$

$$\alpha = (W_f - W_i) / t_f - t_i$$

$$\alpha = \Delta W / \Delta t$$

$$\text{donde } W_f = \text{velocidad final}$$

$W_i$  = velocidad inicial

Las unidades de la aceleración son grados por segundo cada segundo ( $^\circ / s^2$ ).

A este tipo de movimiento se puede llamar movimiento uniformemente acelerado. Para el cálculo de distancias velocidades en este tipo de movimiento aparecen algunas fórmulas derivadas de las anteriores :

$$W_f = W_i + \alpha t$$

$$\phi = W_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$W_f^2 = W_i^2 + 2\alpha\phi$$

### Relaciones entre cinemática lineal y angular

Variables	Cinemática lineal	Cinemática angular
Símbolos		
Distancia	d (metros)	$\phi$ (radianes)
Desplazamiento	d (metros, ángulo)	$\phi$ (rad, hor-antihor)
Rapidez	r (m/s)	$\sigma$ (rad/s)
Velocidad	v (m/s, ángulo)	w (rad/s, hor-antihor)
Aceleración	a (m/s <sup>2</sup> )	$\alpha$ (rad / s <sup>2</sup> )
Ecuaciones		
Desplazamiento	$d = V_i t + \frac{1}{2} a t^2$	$\phi = W_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2$
Velocidad	$V_f = V_i + a t$	$w_f = W_i + \alpha t$
	$V_f^2 = V_i^2 + 2ad$	$w_f^2 = W_i^2 + 2\alpha\phi$
Aceleración	$a = (V_f - V_i) / t_f - t_i$	$\alpha = (W_f - W_i) / t_f - t_i$
Conversiones		
Desplazamiento	$d = \phi * r$	$\phi = d / r$
Velocidad	$v = w * r$	$w = v / r$
Aceleración	$a = \alpha * r$	$\alpha = a / r$

Aunque una partícula girando alrededor de un punto posee una trayectoria curva, en un momento determinado su velocidad es tangente a la trayectoria y por lo tanto tiene una velocidad lineal. La velocidad lineal en un movimiento rotatorio tiene una trayectoria que es perpendicular al radio del movimiento o lo que es lo mismo. Su magnitud se puede hallar obteniendo la velocidad angular en rad/s , multiplicándola por el valor del radio. Por lo tanto :  $V = W * r$

La aceleración lineal, relacionada con la magnitud de la aceleración angular es también tangencial a la trayectoria circular, por lo que se puede escribir :  $\alpha = W / t$  ,  $a = V / t$  ,  $V = W * r$  . Entonces  $a_T = W * r / t$  y  $a_T = \alpha r$

Aunque un cuerpo rote con velocidad angular constante, la dirección de la velocidad siempre está cambiando, por lo que siempre existirá aceleración. El cambio de dirección apunta hacia el centro del círculo a lo largo de su radio y a esto se le llama la *aceleración*

*radial* la cual tiene una dirección radial hacia el centro de la trayectoria y cuya magnitud es igual a  $a_R = W^2 * r = V^2 / r$ .

El componente de aceleración tangencial y el componente de aceleración radial son perpendiculares entre sí ( $a_R$  y  $a_T$  son los dos lados de un triángulo rectángulo), la aceleración resultante será  $a^2 = a_R^2 + a_T^2$ .

**EJERCICIOS RESUELTOS:**

1. Un lanzador de martillo realiza su primera vuelta en 0.8 seg, la segunda en 0.7s y la última en 0.65 seg. ¿Cual fue su desplazamiento angular ?, ¿Cual fue la velocidad angular para cada vuelta ?, ¿ Cual fue su velocidad en radianes por segundo ? ¿Cuál fue su aceleración final ?

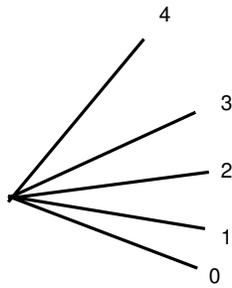
- $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 360^\circ + 360^\circ + 360^\circ = 1080^\circ$
- $W_1 = \theta_1 / \Delta t = 360^\circ / 0.8s = 450^\circ/s$   
 $W_2 = \theta_2 / \Delta t = 360^\circ / 0.7s = 514.3^\circ/s$   
 $W_3 = \theta_3 / \Delta t = 360^\circ / 0.65s = 553.8^\circ/s$
- $W_1 = \theta_1 / \Delta t = (360^\circ / 57.3) / 0.8s = 7.85 \text{ rad/s}$   
 $W_2 = \theta_2 / \Delta t = (360^\circ / 57.3) / 0.7s = 8.97 \text{ rad/s}$   
 $W_3 = \theta_3 / \Delta t = (360^\circ / 57.3) / 0.65s = 9.66 \text{ rad/s}$
- $\alpha = W_3 - w_2 / \Delta t = (9.66 - 8.97) \text{ rad/s} / (0.05 \text{ s}) = 13.8 \text{ rad/s}^2$

2. Un sujeto con un muslo de 42.5 cm de longitud, lo mueve 5° en dirección antihoraria empleando para ello 0.2 s. ¿Cuál es su velocidad angular en rad/s ? ¿ Cual es la velocidad angular de su centro de masa ubicado a 43.35 % en dirección próximo distal ?, ¿Cuál es la distancia recorrida por el rodilla ?, ¿Cuál es la distancia recorrida por el centro de masa ?

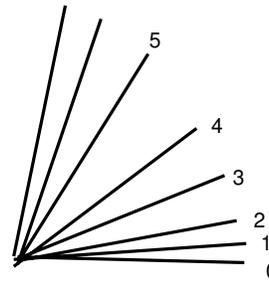
- $W \text{ rad/s} = \theta / \Delta t = (5^\circ / 57.3 \text{ rad}^\circ) / 0.2 \text{ s} = 0.087 \text{ rad} / 0.2s = 0.43 \text{ rad/s}$
- W del centro de masa es igual a la de todo el muslo, porque recorren el mismo ángulo en el mismo tiempo.
- $V \text{ rodilla} = W * r = 0.43 \text{ rad/s} * 0.425 \text{ m} = 0.18 \text{ m/s}$   
 Distancia =  $V * t = 0.18 \text{ m/s} * 0.2 \text{ s} = 0.036 \text{ m}$
- $V \text{ centro de gravedad} = 0.43 \text{ rad/s} * (0.425 \text{ m} * 43.35\%) = 0.08 \text{ m/s}$   
 Distancia =  $V * t = 0.08 \text{ m/s} * 0.2 \text{ s} = 0.016 \text{ m}$ .

3. El gráfico ilustra las posiciones angulares del antebrazo cuando realiza un movimiento de flexión en el codo, en primera instancia sin vencer una resistencia y en segunda instancia con una carga de 50 N. El intervalo de tiempo para cada posición fue de 0.02 segundos. Calcular para cada caso : a) el desplazamiento angular total, b) duración del movimiento, c) velocidad angular promedio, d) La magnitud de la velocidad máxima, e) la posición de la velocidad máxima, f) la magnitud de la aceleración máxima, g) la posición de la aceleración máxima.





Sin carga



Con carga

$\theta_1 = 10^\circ, \theta_2 = 28^\circ, \theta_3 = 45^\circ, \theta_4 = 70^\circ,$ $\theta_5 = 97^\circ, \theta_6 = 110^\circ, \theta_7 = 125^\circ,$	$\theta_1 = 3^\circ, \theta_2 = 10^\circ, \theta_3 = 22^\circ, \theta_4 = 35^\circ,$ $\theta_5 = 58^\circ, \theta_6 = 65^\circ, \theta_7 = 80^\circ, \theta_8 = 90^\circ,$ $\theta_9 = 94^\circ, \theta_{10} = 100^\circ, \theta_{11} = 103^\circ$
---	--

- a) Desplazamiento angular total  
 $125^\circ = 125^\circ/57.3^\circ/r = 2.18r$
- b) Duración del movimiento  
 $T = \# \text{ intervalos} \cdot \text{ tiempo de cada intervalo}$   
 $T = 7 \cdot 0.02 \text{ s} = 0.14 \text{ s}$
- c) Velocidad angular promedio:  
 $W = (W_i + W_f) / 2$   
 $W_f = (\theta_7 - \theta_6) / \Delta t$   
 $W_f = (125^\circ - 110^\circ) / 0.02 \text{ s} = 15^\circ / 0.02 \text{ s}$   
 $W_f = 750^\circ/\text{s} = 13.08 \text{ rad/s}$   
 $W_i = (\theta_1 - \theta_0) / \Delta t$   
 $W_i = (10^\circ - 0^\circ) / 0.02 \text{ s} = 10^\circ / 0.02 \text{ s}$   
 $W_i = 500^\circ/\text{s} = 8.72 \text{ rad/s}$   
 $W = (750^\circ/\text{s} + 500^\circ/\text{s}) / 2 = 1250^\circ/\text{s} / 2 = 625^\circ/\text{s}$   
 $W = (13.08 \text{ r/s} + 8.72 \text{ r/s}) / 2 = 21.8 \text{ r/s} / 2$   
 $W = 10.9 \text{ r/s}$

- d) Velocidad angular máxima:
- $W_1 = (\theta_1 - \theta_0) / \Delta t = 10^\circ - 0^\circ / 0.02 = 500^\circ/\text{s} = 8.72 \text{ r/s}$   
 $W_2 = (\theta_2 - \theta_1) / \Delta t = 28^\circ - 10^\circ / 0.02 = 900^\circ/\text{s} = 15.70 \text{ r/s}$   
 $W_3 = (\theta_3 - \theta_2) / \Delta t = 45^\circ - 28^\circ / 0.02 = 850^\circ/\text{s} = 14.83 \text{ r/s}$   
 $W_4 = (\theta_4 - \theta_3) / \Delta t = 70^\circ - 45^\circ / 0.02 = 1250^\circ/\text{s} = 21.8 \text{ r/s}$   
 $W_5 = (\theta_5 - \theta_4) / \Delta t = 97^\circ - 70^\circ / 0.02 = 900^\circ/\text{s} = 15.70 \text{ r/s}$   
 $W_6 = (\theta_6 - \theta_5) / \Delta t = 110^\circ - 97^\circ / 0.02 = 650^\circ/\text{s} = 11.34 \text{ r/s}$   
 $W_7 = (\theta_7 - \theta_6) / \Delta t = 125^\circ - 110^\circ / 0.02 = 750^\circ/\text{s} = 13.0 \text{ r/s}$

- La mayor velocidad es  $W_4$

- e) Posición de la velocidad máxima  
 $W_4 = \text{entre } 45^\circ \text{ y } 74^\circ$

- a) Desplazamiento angular total  
 $103^\circ = 103^\circ/57.3^\circ/r = 1.83 r$
- b) Duración del movimiento  
 $T = \# \text{ intervalos} \cdot \text{ tiempo de cada intervalo}$   
 $T = 11 \cdot 0.02 \text{ s} = 0.22 \text{ s}$
- c) Velocidad angular promedio:  
 $W = (W_i + W_f) / 2$   
 $W_f = (\theta_{11} - \theta_{10}) / \Delta t$   
 $W_f = (103^\circ - 100^\circ) / 0.02 \text{ s} = 3^\circ / 0.02 \text{ s}$   
 $W_f = 150^\circ/\text{s} = 2.61 \text{ rad/s}$   
 $W_i = (\theta_1 - \theta_0) / \Delta t$   
 $W_i = (3^\circ - 0^\circ) / 0.02 \text{ s} = 3^\circ / 0.02 \text{ s}$   
 $W_i = 150^\circ/\text{s} = 2.61 \text{ rad/s}$   
 $W = (150^\circ/\text{s} + 150^\circ/\text{s}) / 2 = 300^\circ/\text{s} / 2 = 150^\circ/\text{s}$   
 $W = (2.61 \text{ r/s} + 2.61 \text{ r/s}) / 2$   
 $W = 2.61 \text{ r/s}$

- d) Velocidad angular máxima:
- $W_1 = (\theta_1 - \theta_0) / \Delta t = 3^\circ - 0^\circ / 0.02 = 150^\circ/\text{s} = 2.61 \text{ r/s}$   
 $W_2 = (\theta_2 - \theta_1) / \Delta t = 10^\circ - 3^\circ / 0.02 = 350^\circ/\text{s} = 6.10 \text{ r/s}$   
 $W_3 = (\theta_3 - \theta_2) / \Delta t = 22^\circ - 10^\circ / 0.02 = 600^\circ/\text{s} = 10.47 \text{ r/s}$   
 $W_4 = (\theta_4 - \theta_3) / \Delta t = 35^\circ - 22^\circ / 0.02 = 650^\circ/\text{s} = 11.34 \text{ r/s}$   
 $W_5 = (\theta_5 - \theta_4) / \Delta t = 58^\circ - 35^\circ / 0.02 = 900^\circ/\text{s} = 15.7 \text{ r/s}$   
 $W_6 = (\theta_6 - \theta_5) / \Delta t = 65^\circ - 58^\circ / 0.02 = 350^\circ/\text{s} = 6.10 \text{ r/s}$   
 $W_7 = (\theta_7 - \theta_6) / \Delta t = 80^\circ - 65^\circ / 0.02 = 750^\circ/\text{s} = 13.0 \text{ r/s}$   
 $W_8 = (\theta_8 - \theta_7) / \Delta t = 90^\circ - 80^\circ / 0.02 = 500^\circ/\text{s} = 8.72 \text{ r/s}$   
 $W_9 = (\theta_9 - \theta_8) / \Delta t = 94^\circ - 90^\circ / 0.02 = 200^\circ/\text{s} = 3.49 \text{ r/s}$   
 $W_{10} = (\theta_{10} - \theta_9) / \Delta t = 100^\circ - 94^\circ / 0.02 = 300^\circ/\text{s} = 5.23 \text{ r/s}$   
 $W_{11} = (\theta_{11} - \theta_{10}) / \Delta t = 103^\circ - 100^\circ / 0.02 = 150^\circ/\text{s} = 2.61 \text{ r/s}$

- La velocidad mayor fue  $W_5$

- e) Posición de la velocidad máxima  
 $W_4 = \text{entre } 35^\circ \text{ y } 58^\circ$

f) La magnitud de la aceleración máxima

$$a_1 = (w_2 - \theta_1) / \Delta t = (15.7 - 8.72) r/s / 0.02s = 349 \text{ r/s}^2$$

$$a_2 = (w_3 - \theta_2) / \Delta t = (14.83 - 15.7) r/s / 0.02s = -43.5 \text{ r/s}^2$$

$$a_3 = (w_4 - \theta_3) / \Delta t = (21.8 - 14.83) r/s / 0.02s = 348.5 \text{ r/s}^2$$

$$a_4 = (w_5 - \theta_4) / \Delta t = (15.7 - 21.8) r/s / 0.02s = -305 \text{ r/s}^2$$

$$a_5 = (w_6 - \theta_5) / \Delta t = (11.34 - 15.7) r/s / 0.02s = -218 \text{ r/s}^2$$

$$a_6 = (w_7 - \theta_6) / \Delta t = (13.0 - 11.34) r/s / 0.02s = 83 \text{ r/s}^2$$

La aceleración máxima positiva fue entre W1-W2  
La aceleración máxima negativa fue entre W4-W5

f) La magnitud de la aceleración máxima

$$a_1 = (w_2 - \theta_1) / \Delta t = (6.1 - 2.61) r/s / 0.02s = 174.5 \text{ r/s}^2$$

$$a_2 = (w_3 - \theta_2) / \Delta t = (10.47 - 6.1) r/s / 0.02s = 218.5 \text{ r/s}^2$$

$$a_3 = (w_4 - \theta_3) / \Delta t = (11.34 - 10.47) r/s / 0.02s = 43.5 \text{ r/s}^2$$

$$a_4 = (w_5 - \theta_4) / \Delta t = (15.7 - 11.34) r/s / 0.02s = 218 \text{ r/s}^2$$

$$a_5 = (w_6 - \theta_5) / \Delta t = (6.1 - 15.7) r/s / 0.02s = -480 \text{ r/s}^2$$

$$a_6 = (w_7 - \theta_6) / \Delta t = (13.0 - 6.1) r/s / 0.02s = 345 \text{ r/s}^2$$

$$a_7 = (w_8 - \theta_7) / \Delta t = (8.72 - 13.0) r/s / 0.02s = -214 r/s^2$$

$$a_8 = (w_9 - \theta_8) / \Delta t = (3.49 - 8.72) r/s / 0.02s = -261.5 \text{ r/s}^2$$

$$a_9 = (w_{10} - \theta_9) / \Delta t = (5.23 - 3.49) r/s / 0.02s = 87 \text{ r/s}^2$$

$$a_{10} = (w_{11} - \theta_{10}) / \Delta t = (2.61 - 5.23) r/s / 0.02s = -131 r/s^2$$

La aceleración máxima positiva fue entre W6-W7  
La aceleración máxima negativa fue entre W8-W9

4. Para el problema anterior, sabiendo que el antebrazo del sujeto tiene 45 cm de largo, calcule para el caso del movimiento libre: a) la velocidad tangencial o lineal b) la aceleración radial y tangencial, c) la aceleración resultante.

a) velocidad tangencial

$$V_T = W * r$$

$$V_{T1} = W_1 * r = 8.72 \text{ r/s} * 0.45 \text{ m/r} = 3.92 \text{ m/s}$$

$$V_{T2} = W_2 * r = 15.7 \text{ r/s} * 0.45 \text{ m/r} = 7.06 \text{ m/s}$$

$$V_{T3} = W_3 * r = 14.83 \text{ r/s} * 0.45 \text{ m/r} = 6.67 \text{ m/s}$$

$$V_{T4} = W_4 * r = 21.8 \text{ r/s} * 0.45 \text{ m/r} = 9.81 \text{ m/s}$$

$$V_{T5} = W_5 * r = 15.7 \text{ r/s} * 0.45 \text{ m/r} = 7.06 \text{ m/s}$$

$$V_{T6} = W_6 * r = 11.34 \text{ r/s} * 0.45 \text{ m/r} = 5.10 \text{ m/s}$$

$$V_{T7} = W_7 * r = 13.0 \text{ r/s} * 0.45 \text{ m/r} = 5.85 \text{ m/s}$$

c) aceleración tangencial

$$a_T = \Delta V_T / \Delta t$$

$$a_{T1} = (V_{T2} - V_{T1}) / \Delta t = (7.06 - 3.92) \text{ m/s} / 0.02s = 157 \text{ m/s}^2$$

$$a_{T2} = (V_{T3} - V_{T2}) / \Delta t = (6.67 - 7.06) \text{ m/s} / 0.02s = -19.5 \text{ m/s}^2$$

$$a_{T3} = (V_{T4} - V_{T3}) / \Delta t = (9.81 - 6.67) \text{ m/s} / 0.02s = 157 \text{ m/s}^2$$

$$a_{T4} = (V_{T5} - V_{T4}) / \Delta t = (7.06 - 9.81) \text{ m/s} / 0.02s = -137.5 \text{ m/s}^2$$

$$a_{T5} = (V_{T6} - V_{T5}) / \Delta t = (5.10 - 7.06) \text{ m/s} / 0.02s = -99 \text{ m/s}^2$$

$$a_{T6} = (V_{T7} - V_{T6}) / \Delta t = (5.85 - 5.10) \text{ m/s} / 0.02s = 37.5 \text{ m/s}^2$$

b) aceleración radial

$$a_R = V^2 / r$$

$$a_{R1} = V_1^2 / r = (3.92 \text{ m/s})^2 / 0.45 \text{ m} = 34.14 \text{ m/s}^2$$

$$a_{R2} = V_2^2 / r = (7.06 \text{ m/s})^2 / 0.45 \text{ m} = 110.76 \text{ m/s}^2$$

$$a_{R3} = V_3^2 / r = (6.67 \text{ m/s})^2 / 0.45 \text{ m} = 98.86 \text{ m/s}^2$$

$$a_{R4} = V_4^2 / r = (9.81 \text{ m/s})^2 / 0.45 \text{ m} = 213.85 \text{ m/s}^2$$

$$a_{R5} = V_5^2 / r = (7.06 \text{ m/s})^2 / 0.45 \text{ m} = 110.76 \text{ m/s}^2$$

$$a_{R6} = V_6^2 / r = (5.10 \text{ m/s})^2 / 0.45 \text{ m} = 57.8 \text{ m/s}^2$$

$$a_{R7} = V_7^2 / r = (5.85 \text{ m/s})^2 / 0.45 \text{ m} = 76.05 \text{ m/s}^2$$

d) aceleración resultante.

$$a_R = (a_T^2 + a_R^2)^{1/2}$$

$$a_{R1} = (a_{T1}^2 + a_{R1}^2)^{1/2} = (157^2 + 34.14^2)^{1/2} = 160.6 \text{ m/s}^2$$

$$a_{R2} = (a_{T2}^2 + a_{R2}^2)^{1/2} = (-19.5^2 + 110.76^2)^{1/2} = 110.76 \text{ m/s}^2$$

$$a_{R3} = (a_{T3}^2 + a_{R3}^2)^{1/2} = (157^2 + 98.86^2)^{1/2} = 185.5 \text{ m/s}^2$$

$$a_{R4} = (a_{T4}^2 + a_{R4}^2)^{1/2} = (-137^2 + 213.8^2)^{1/2} = 253.9 \text{ m/s}^2$$

$$a_{R5} = (a_{T5}^2 + a_{R5}^2)^{1/2} = (-99^2 + 110.76^2)^{1/2} = 148.5 \text{ m/s}^2$$

$$a_{R6} = (a_{T6}^2 + a_{R6}^2)^{1/2} = (37.5^2 + 57.8^2)^{1/2} = 68.9 \text{ m/s}^2$$

BIBLIOGRAFÍA :

- Enoka, R. (1988). Neuromechanical Basis of Kinesiology. Human Kinetics. Champaign, Illinois.
- Hay, J.G. (1978 ) The Biomechanics of Sports Techniques. 2 ed. Prentice Hall, Inc.
- Luttgens, K., Wells, K. (1982). Kinesiología: Bases científicas del movimiento humano. 7 ed. Saunders College Publishing.
- O'Connell, A., Gardner, E. (1981). Understanding The Scientific Bases of Human Movement. Williams Wilkins. Baltimore, London.
- Williams, I.M., Lessner, H. (1991). Biomecánica del movimiento humano. Ed. Trillas, Argentina.